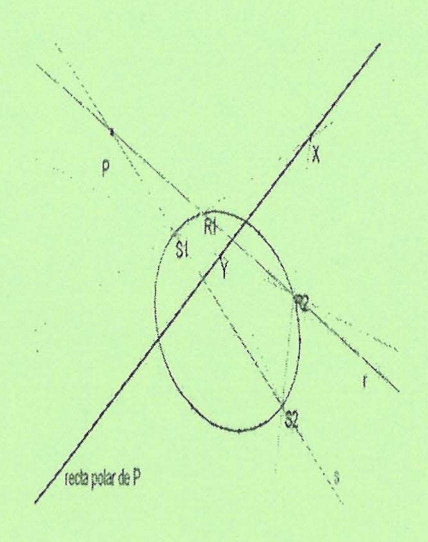
ESPACIO PROYECTIVO REAL. CÓNICAS

por

EUGENIA ROSADO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-65-03

ESPACIO PROYECTIVO REAL.CÓNICAS

por

EUGENIA ROSADO

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

3-65-03

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA

NUMERACIÓN

2 Área
51 Autor
09 Ordinal de cuaderno (del autor)

0 VARIOS
1 ESTRUCTURAS
2 CONSTRUCCIÓN
3 FÍSICA Y MATEMÁTICAS
4 TEORÍA
5 GEOMETRÍA Y DIBUJO
6 PROYECTOS
7 URBANISMO
8 RESTAURACIÓN

I ***Espacio proyectivo real. Cónicas***

Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Gestiòn y portada : Nadia Soddu.
CUADERNO 302.01 / 3-65-03
ISBN: 978-84-9728-326-57(obra completa)
ISBN-13: 978-84-9728-329-8
Depósito Legal: M- 7206-2010

"Confieso francamente que nunca he sentido gusto por el estudio o la investigación en física o en geometría, a no ser que pudiera servir como medio de llegar a algún tipo de conocimiento de las causas próximas...para el bien y la comodidad de la vida, el mantenimiento de la salud, la práctica de algún arte...pues he observado que una buena parte de las artes se basa en la geometría, como el de tallar la piedra en arquitectura, el de los relojes de sol, y el de la perspectiva en particular."

Girard Desargues

Índice

1 Espacio Proyectivo

1.1 Definiciones

Sea V un espacio vectorial.

- Se llama *espacio proyectivo* y se denota $\mathbb{P}(V)$ al conjunto de rectas vectoriales de V.
- Cada recta vectorial se llama *punto proyectivo.*
- Se llama *dimensión* del espacio proyectivo a $\dim \mathbb{P}(V) = \dim V - 1$.

El espacio proyectivo se puede definir de modo alternativo como las clases de equivalencia de vectores no nulos de V con la siguiente relación de equivalencia:
$\vec{v}$ está relacionado con $\vec{w}$ si y sólo si existe $\lambda \neq 0$, $\vec{v} = \lambda\vec{w}$.

En particular, llamamos *plano proyectivo real* y se denota $\mathbb{P}_2$ al conjunto de rectas vectoriales de $\mathbb{R}^3$; esto es

$$\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) = \{< \vec{v} > \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^3\}.$$

Y llamamos *espacio proyectivo real* y se denota $\mathbb{P}_3$ al conjunto de rectas vectoriales de $\mathbb{R}^4$; esto es

$$\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^4) = \{< \vec{v} > \mid \vec{v} \in \mathbb{R}^4\}.$$

1.2 Coordenadas homogéneas

Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Se dice que una familia de puntos $\{< \vec{v}_1 >, ..., < \vec{v}_r >\}$ de $\mathbb{P}(V)$ generan el espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$ si la familia de vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r\}$ generan el espacio vectorial V.

Sea $\mathbb{P}(V)$ un espacio proyectivo. Se dice que los puntos $< \vec{v}_1 >, ..., < \vec{v}_r >$ de $\mathbb{P}(V)$ son *proyectivamente independientes* si los vectores $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_r$ de V son linealmente independientes.

Ejemplo. Consideremos $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$, entonces una familia generadora e independiente de puntos de $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ está formada por tres puntos $X_1 =< \vec{v}_1 >$, $X_2 =< \vec{v}_2 >$ y $X_3 =< \vec{v}_3 >$ de manera que los tres vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ y $\vec{v}_3$ son linealmente independientes.

Y un punto $X =< \vec{w} > \in \mathbb{P}_2$ se expresa de modo único como sigue:

$$\vec{w} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3,$$

y las coordenadas de X serían $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Si elegimos el representante $\lambda\vec{w}$ de X, pues $X =< \lambda\vec{w} > \in \mathbb{P}_2$ entonces

$$\lambda\vec{w} = \lambda\alpha_1\vec{v}_1 + \lambda\alpha_2\vec{v}_2 + \lambda\alpha_3\vec{v}_3,$$

y las coordenadas de X serían $(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$. Como las coordenadas son únicas vamos a identificar

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \text{ con } (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3) \text{ para } \lambda \neq 0$$

y llamamos *coordenadas homogéneas* del punto X a la clase $[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$; esto es,

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \{(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3), \text{ con } \lambda \neq 0\}.$$

1.3 Relación entre el espacio afín y el proyectivo

Sea $\mathbb{A}$ un espacio afín con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^n$. Los puntos $X \in \mathbb{A}$ los podemos ver como puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ X &\longrightarrow < (1, X) > . \end{aligned}$$

Si $\mathcal{R} = \{O, B\}$ es un sistema de referencia de $\mathbb{A}$ y $(x_1, ..., x_n)$ son las coordenadas de $X \in \mathbb{A}$ entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (x_1, ..., x_n) &\longrightarrow < (1, x_1, ..., x_n) > . \end{aligned}$$

A los puntos de $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ que no son de la forma $< (1, x_1, ..., x_n) >$ se les denomina *puntos del infinito* o *puntos impropios*. Los puntos impropios son de la forma $< (0, x_1, ..., x_n) >$ por tanto, están en le hiperplano proyectivo de ecuación $x_0 = 0$.

Definición. Sea $\mathbb{A}_n$ un espacio afín con espacio vectorial asociado $\mathbb{R}^n$ con sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$. Se llama *espacio afín proyectivizado* y se denota $\overline{\mathbb{A}}_n$ al conjunto formado por todos los puntos de $\mathbb{A}_n$ junto con los puntos del infinito de $\mathbb{A}_n$; esto es,

$$\overline{\mathbb{A}}_n = \mathbb{A}_n \cup \{(0, x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}.$$

Identificamos $\overline{\mathbb{A}}_n$ con $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{A}}_n &\longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (1, \frac{x_1}{x_0}, ..., \frac{x_n}{x_0}) &\longrightarrow [(x_0, x_1, ..., x_n)], \quad (x_0 \neq 0) \text{ puntos propios de } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \\ (0, x_1, ..., x_n) &\longrightarrow [(0, x_1, ..., x_n)], \quad (x_0 = 0) \text{ puntos impropios de } \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \end{aligned}$$

1.4 Ecuaciones de las rectas del plano proyectivo

Sea $\mathbb{P}_2$ el plano proyectivo real.

Dados dos puntos independientes $P, Q \in \mathbb{P}_2$, se tiene $P =< \vec{v} >$ y $Q =< \vec{w} >$ con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ vectores linealmente independientes, la recta r que contiene a P y Q es

$$r = \{< \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} > \mid (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}.$$

Si los puntos P y Q tienen las siguientes coordenadas homogéneas:

$$P = [(p_0, p_1, p_2)], \quad Q = [(q_0, q_1, q_2)]$$

entonces se tiene que un punto $X \in r$ si y sólo si sus coordenadas $[(x_0, x_1, x_2)]$ cumplen las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \alpha x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \alpha x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \end{cases}, \quad (\alpha, \lambda, \mu) \neq (0,0,0)$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* de la recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$.

Equivalentemente el punto $X = [(x_0, x_1, x_2)] \in r$ si y sólo si

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$$

que es la *ecuación cartesiana* de la recta que se obtiene al imponer que el siguiente determinante se anule:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \end{vmatrix}.$$

1.4.1 Relación entre las rectas del plano afín real y del plano proyectivo.

Sea $\mathbb{A}_2$ el plano afín con referencia $\mathcal{R} = \{O, B\}$ y sea la recta r del plano afín $\mathbb{A}_2$ con ecuación $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Sean $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ dos puntos de la recta, entonces los puntos del plano proyectivo $[(1, p_1, p_2)]$, $[(1, q_1, q_2)]$ determinan una recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ con ecuación $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ que se llama la *recta de* $\mathbb{P}_2$ *asociada a la recta afín* r.

Recíprocamente, dada una recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ con ecuación $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$. Si $p_0 \neq 0$, entonces el punto del plano afín $\left(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}\right)$ está en la recta r del plano afín $\mathbb{A}_2$ de ecuación:

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0.$$

Definición. La recta que une dos puntos propios de $\mathbb{P}_2$ se dice que es una *recta propia* de $\mathbb{P}_2$.

Toda recta propia, $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$, determina un punto del infinito o impropio $[0, -a_2, a_1]$ donde $(-a_2, a_1)$ es el vector director de la recta r del plano afín $\mathbb{A}_2$ de ecuación $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$.

Definición. La recta que une dos puntos impropios de $\mathbb{P}_2$ se dice que es una *recta impropia* de $\mathbb{P}_2$ y tiene ecuación $x_0 = 0$.

1.5 Ecuaciones de subespacios proyectivos de $\mathbb{P}_3$

Sea $\mathbb{P}_3$ el espacio proyectivo real tridimensional.

1.5.1 Rectas en $\mathbb{P}_3$

Sean P, Q dos puntos independientes de $\mathbb{P}_3$. Por tanto, $P =< \vec{v} >$ y $Q =< \vec{w} >$ con $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^4$ vectores linealmente independientes. La recta r que contiene a P y Q es

$$r = \{< \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} > \mid (\lambda, \mu) \neq (0, 0)\}.$$

Si los puntos P y Q tienen las siguientes coordenadas homogéneas:

$$P = [(p_0, p_1, p_2, p_3)], \quad Q = [(q_0, q_1, q_2, q_3)]$$

entonces se tiene que un punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)] \in r$ si y sólo si sus coordenadas cumplen las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha x_0 = \lambda p_0 + \mu q_0 \\ \alpha x_1 = \lambda p_1 + \mu q_1 \\ \alpha x_2 = \lambda p_2 + \mu q_2 \\ \alpha x_3 = \lambda p_3 + \mu q_3 \end{array} \right. , \quad (\alpha, \lambda, \mu) \neq (0, 0, 0)$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* de la recta r del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$.

Equivalentemente el punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece en la recta r del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$ si y sólo si

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} x_0 & p_0 & q_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 \end{pmatrix} = 2,$$

de donde se obtienen las dos *ecuaciones cartesianas* de la recta.

Definición. La recta que une dos puntos propios de $\mathbb{P}_3$ se dice que es una *recta propia* de $\mathbb{P}_3$. Y sus ecuaciones son las ecuaciones homogéneas de una recta afín.

Definición. La recta que une dos puntos impropios de $\mathbb{P}_3$ se dice que es una *recta impropia* de $\mathbb{P}_3$.

Observación. En $\mathbb{P}_3$ hay infinitas rectas impropias.

1.5.2 Planos en $\mathbb{P}_3$

Dados tres puntos $P =< \vec{v} >$, $Q =< \vec{w} >$ y $R =< \vec{u} >$ de $\mathbb{P}_3$ independientes, el plano que contiene a P, Q y R es

$$\pi = \{< \lambda\vec{v} + \mu\vec{w} + \gamma\vec{u} > \mid (\lambda, \mu, \gamma) \neq (0, 0, 0)\}.$$

Si los puntos P, Q y R tienen las siguientes coordenadas homogéneas:

$$\begin{aligned} P &= [(p_0, p_1, p_2, p_3)] \\ Q &= [(q_0, q_1, q_2, q_3)] \\ R &= [(r_0, r_1, r_2, r_3)] \end{aligned}$$

entonces se tiene que un punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece al plano π del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$ si y sólo si sus coordenadas cumple las siguientes ecuaciones

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha x_0 &= \lambda p_0 + \mu q_0 + \gamma r_0 \\ \alpha x_1 &= \lambda p_1 + \mu q_1 + \gamma r_1 \\ \alpha x_2 &= \lambda p_2 + \mu q_2 + \gamma r_2 \\ \alpha x_3 &= \lambda p_3 + \mu q_3 + \gamma r_3 \end{aligned} \right. , \quad (\alpha, \lambda, \mu, \gamma) \neq (0, 0, 0, 0)$$

que se llaman *ecuaciones paramétricas* del plano π del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$.

Equivalentemente el punto $X = [(x_0, x_1, x_2, x_3)]$ pertenece al plano π del espacio proyectivo $\mathbb{P}_3$ si y sólo si

$$a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

que es la *ecuación cartesiana* del plano que se obtiene al imponer que el siguiente determinante se anule:

$$0 = \begin{vmatrix} x_0 & p_0 & q_0 & r_0 \\ x_1 & p_1 & q_1 & r_1 \\ x_2 & p_2 & q_2 & r_2 \\ x_3 & p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Observaciones.

Tres puntos propios determinan un *plano propio* de $\mathbb{P}_3$. Y su ecuación es la ecuación homogénea de un plano afín.

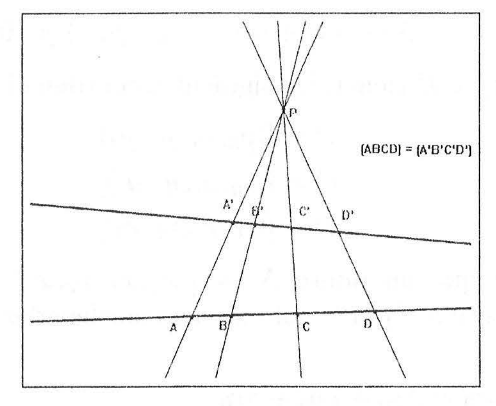
Tres puntos impropios determinan un *plano propio* de $\mathbb{P}_3$ que tiene por ecuación cartesiana la ecuación $x_0 = 0$.

Todo plano propio determina una recta impropia. Y toda recta impropia está contenida en el plano impropio $x_0 = 0$.

1.6 Razón doble

Teorema. Si cuatro puntos alineados A, B, C, D, se proyectan desde un vértice V en cuatro puntos alineados A', B', C', D', entonces las siguientes razones son iguales:

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{A'C'}{C'B'}}{\frac{A'D'}{D'B'}}.$$



Observación. Por tanto la razón $\frac{AC}{CB} : \frac{AD}{DB}$ se mantiene invariante por proyecciones.

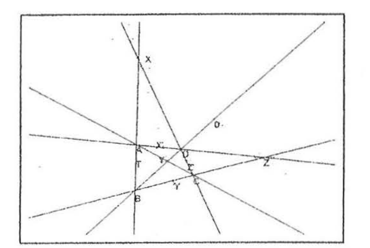
Definición. Sean A, B, C, D cuatro puntos alineados. Entonces la *razón doble* $\{A, B; C, D\}$ del par ordenado (C, D) con respecto al par ordenado (A, B) es

$$\{A, B; C, D\} = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

Un caso especial importante ocurre cuando el valor de la razón doble $\{A, B; C, D\}$ es -1. En ese caso, C y D divide el segmento $\overline{AB}$ interna y externamente en la misma proporción y se dice que los pares de puntos (A, B) y (C, D) son *conjugados armónicos* uno con respecto al otro. Si, en particular, C y D divide $\overline{AB}$ interna y externamente en la razón $1 : 1$, entonces uno de ellos es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el otro es el punto del infinito de la recta que une A y B.

1.7 Cuadrángulo completo

Consideremos ahora cuatro puntos A, B, C, D en el plano de manera que no haya cuatro de ellos alineados. También se obtiene en este caso una configuración interesante conocida como *cuadrángulo completo*. Los puntos A, B, C, D se pueden unir en pares de tres maneras diferentes (AB, CD), (AC, BD) y (AD, BC). Cada par de lados opuestos tiene un punto de intersección X, Y, Z, llamados los *vértices del triángulo diagonal* del cuadrilátero.


X
O
A
D
Z
B

2 Cónicas

Definición. Una *cónica* $\bar{C}$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$ es el conjunto de puntos cuyas coordendas en cierta referencia $\mathcal{R}$ satisfacen una ecuación homogénea de grado 2:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j \\ &= a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{01}x_0x_1 + a_{10}x_1x_0 \\ &+ a_{02}x_0x_2 + a_{20}x_2x_0 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1. \end{aligned}$$

Y se dice que es *propia* o *degenerada* si no es o es irreducible.

Por ejemplo, $\bar{C}_1 \equiv x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_1x_2 = 0$ es una cónica propia pues el polinomio homogéneo de grado 2, $x_0^2 + 2x_1^2 + 3x_1x_2 = 0$ es irreducible (no se puede poner como producto de dos polinomios de grado 1). Sin embargo, la cónica $C_2 \equiv x_0^2 - 4x_1^2 = 0$ es degenerada pues $x_0^2 - 4x_1^2 = (x_0 - 2x_1)(x_0 + 2x_1)$; esto es la cónica C_2 son dos rectas que se cruzan. Finalmente, la cónica $\bar{C}_3 \equiv (x_0 + 2x_1 + 3x_2)^2 = 0$ es degenerada. La cónica C_3 es una recta doble.

Usando notación matricial, la ecuación de la cónica

$$\bar{C} \equiv \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_{ij}x_ix_j = 0$$

se puede escribir como sigue

$$\bar{C} \equiv X^TAX = 0,$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

esto es,

$$X \in \bar{C} \iff X^TAX = 0.$$

Más formalmente,

Definición. Dada una forma cuadrática $\omega \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. La *cónica proyectiva* definida por ω es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)$, donde se anula ω; esto es,

$$\bar{C} = \{X \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3) \mid \omega(X) = 0\}.$$

Y la *cónica afín* definida por ω es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{A}_2$, $\tilde{X} = (1, x_1, x_2)$, donde se anula ω; esto es,

$$C = \{X \in \mathbb{A}_2 \mid \omega(\tilde{X}) = 0\}.$$

Se tiene $C \subset \bar{C}$.

Recuerdo.

Definición. Una *forma cuadrática* $\omega\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación tal que existe una forma bilineal $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\omega(v) = f(v, v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Resultado. Dada una forma cuadrática ω existe una forma bilineal f tal que:

1. f es simétrica (esto es, $f(u, v) = f(v, u)$)
2. la forma cuadrática asociada a f es ω
3. f es única.

A la única forma bilineal simétrica f cuya forma cuadrática es ω la llamamos la *forma polar* de ω.

La forma polar de una forma cuadrática ω viene dada como sigue:

$$f(u, v) = \frac{1}{2}(\omega(u + v) - \omega(u) - \omega(v)).$$

Se tiene:

$$\omega(X) = f(X, X).$$

2.1 Puntos singulares

Definición. Sea $\bar{C}$ una cónica proyectiva generada por una forma cuadrática ω, con forma polar f y matriz asociada A.

- Se dice que dos puntos $P, Q \in \mathbb{P}_2$ son *conjugados* si $f(P, Q) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_2$ es un punto *autoconjugado* si $\omega(P) = f(P, P) = 0$.
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_2$ es un *punto singular* de $\bar{C}$ si es conjudado con cualquier punto de $\mathbb{P}_2$; esto es, $f(P, Q) = 0$ para todo punto $Q \in \mathbb{P}_2$. Esto es, si
$$f(P, Q) = P^T A Q = 0, \ \forall Q \in \mathbb{P}_2,$$
o equivalentemente,
$$P^T A = 0.$$
- Se dice que un punto $P \in \mathbb{P}_2$ es un *punto regular* de $\bar{C}$ si no es un punto singular.

$f(Z, T) = 0$, para todo $T \in \mathbb{P}_2$. Tenemos:

$$\begin{aligned} f(Z,T) &= f(\lambda X + \mu Y, T) \\ &= f(\lambda X, T) + f(\mu Y, T) \\ &= \lambda \underbrace{f(X,T)}_{0} + \mu \underbrace{f(Y,T)}_{0} = 0. \end{aligned}$$

5. Si la cónica $\bar{C}$ contiene un punto singular, entonces $\bar{C}$ está formada por rectas que pasan por ese punto.

2.2 Polaridad definida por una cónica

Sea $\bar{C}$ una cónica con forma polar f y matriz asociada A. Sea $P \in \mathbb{P}_2$, llamamos *variedad polar* de P respecto de la cónica $\bar{C}$ al conjunto de puntos conjugados de P; esto es ,

$$V_P = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P, X) = 0\}.$$

Si P es un punto singular, entonces $V_P = \mathbb{P}_2$.

Si P no es un punto singular, entonces V_P es una recta que denotamos r_P y llamamos *recta polar* de P respecto de la cónica $\bar{C}$. Por tanto, la recta polar de un punto $P \in \mathbb{P}_2$ no singular es el conjunto de puntos conjugados con P.

2.2.1 Ecuación de la recta polar

Si P es un punto no singular con coordenadas $[(p_0, p_1, p_2)]$ y la matriz asociada a la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

entonces

$$r_P = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid P^T A X = 0\},$$

esto es,

$$\begin{aligned} 0 = P^T A X = (p_0, p_1, p_2) & \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ = (p_0 a_{00} + p_1 a_{01} + p_2 a_{02}) x_0 &+ (p_0 a_{01} + p_1 a_{11} + p_2 a_{12}) x_1 \\ + (p_0 a_{02} + p_1 a_{12} + p_2 a_{22}) x_2. & \end{aligned}$$

2.2.2 Construcción geométrica de la recta polar

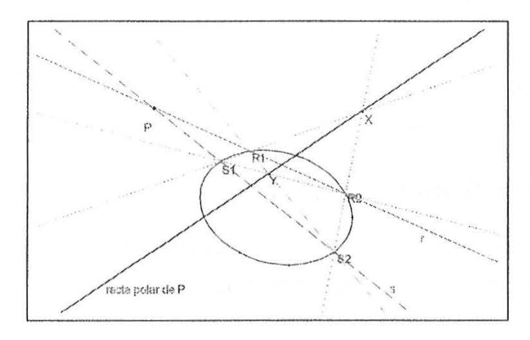
Dados la cónica $\bar{C}$ y un punto $P \in \mathbb{P}_2$ no singular, vamos a obtener la *recta polar* de P respecto de la cónica $\bar{C}$.

Primero, tomamos dos rectas r, s desde P que corten a la cónica en cuatro puntos: R_1, R_2, S_1, S_2.

La recta polar de P respecto de $\bar{C}$ es la recta de cuartos armónicos de P respecto de los pares de puntos de intersección; esto es, los puntos X tales que $\{P, X; R_1, R_2\} = -1$.

Para obtener los cuartos armónicos, construimos el cuadrángulo completo; esto es, construimos

1. las rectas diagonales del cuadrilátero $R_1R_2S_1S_2$: rectas R_1S_1, R_2S_2, R_1S_2 y R_2S_1,
2. consideramos los puntos de intersección. $X = R_1S_1 \cap R_2S_2$, $Y = R_1S_2 \cap R_2S_1$.



La polar de P respecto de $\bar{C}$ es la recta XY.

2.2.3 Polo de una recta respecto a una cónica $\bar{C}$

Definición. Dada una recta r del plano proyectivo $\mathbb{P}_2$, llamamos *polo* de la recta r respecto de la cónica $\bar{C}$ al punto cuya recta polar es r; esto es, $r_P = r$.

Si la ecuación de la recta r es

$$r \equiv u_0x_0 + u_1x_1 + u_2x_2 = U^TX = 0,$$
$$\text{con } U = (u_0, u_1, u_2) \text{ y } X = (x_0, x_1, x_2),$$

entonces $r_P = r$ si y sólo si

$$P^TAX = U^TX, \text{ para todo } X \in \mathbb{P}_2$$

ó equivalentemente,

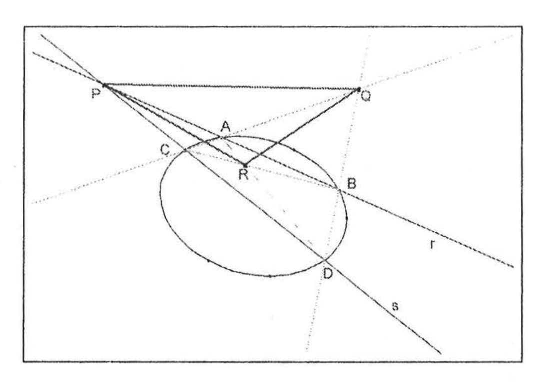
$$P^TA = U^T \Longleftrightarrow AP = U.$$

Y si la cónica $\bar{C}$ no es degenerada (por tanto, $\det A \neq 0$), entonces $P = A^{-1}U$.

Teorema. Si la polar de un punto Q pasa por un punto P, entonces la polar de P pasa por el punto Q.

Esto es debido a que la condición de conjugación $f(P,Q) = 0$, es simétrica en P y Q.

Teorema. Si A, B, C, D son cuatro puntos en una cónica $\bar{C}$, entonces el triángulo diagonal (triángulo con vértices P, X, Y, en el dibujo) del cuadrángulo $ABCD$, es autopolar para $\bar{C}$. Esto es, la recta que une XP es la recta polar de Y, la recta que une PY es la recta polar de X, y la recta XY es la recta polar de P.



2.2.4 Polaridad definida por una cónica

Como hemos visto, dada una cónica $\bar{C}$ a cada punto P no singular se le asigna una recta (su recta polar) y recíprocamente, a cada recta r se le asigna un punto (su polo).

Definición. Se llama *polaridad definida por una cónica* $\bar{C}$ a la aplicación que a cada punto no singular de $\bar{C}$ le hace corresponder su recta polar. Esto es,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_2 \setminus \mathrm{Sing}(\bar{C}) &\longrightarrow \text{Rectas de } \mathbb{P}_2 \\ P &\longmapsto r_P \end{aligned}$$

Teorema de la polaridad definida por una cónica regular.

Las rectas polares de los puntos de una recta r de $\mathbb{P}_2$, respecto de una cónica regular $\bar{C}$, pasan todas por un mismo punto que es precisamente el polo de r.

2.3 Intersección de recta y cónica

Sea $\bar{C}$ una cónica proyectiva con forma polar f y matriz asociada A y sea r una recta proyectiva que contiene a los puntos $P = [(p_0, p_1, p_2)]$ y $Q = [(q_0, q_1, q_2)]$.

Un punto $X \in \mathbb{P}_2$ está en la intersección de la cónica y la recta si y sólo si:

$$\begin{cases} X \in r \\ X \in \bar{C} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(X) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X = \lambda P + \mu Q \\ \omega(\lambda P + \mu Q) = 0 \end{cases}$$

La condición $\omega(\lambda P + \mu Q) = 0$ se escribe:

$$0 = \lambda^2 \omega(P) + 2\lambda\mu f(P,Q) + \mu^2 \omega(Q).$$

Dividiendo la ecuación anterior por μ^2 y escribiendo $t = \lambda/\mu$ se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$0 = \omega(P)t^2 + 2f(P,Q)t + \omega(Q)$$

con discriminante

$$\Delta = f(P,Q)^2 - \omega(P)\omega(Q).$$

- Si $f(P,Q) = 0$, $\omega(P) = 0$ y $\omega(Q) = 0$, entonces $P, Q \in \bar{C}$ y, por tanto, $r \subset \bar{C}$. Luego la cónica está formada por rectas.

- Si no todos los coeficientes de la ecuación de segundo grado $0 = \omega(P)t^2 + 2f(P,Q)t + \omega(Q)$ son nulos, entonces hay dos puntos de corte (las dos soluciones de la ecuación).

  1. Si $\Delta = f(P,Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) > 0$, la recta y la cónica se cortan en dos puntos reales distintos. La recta se dice que es una *recta secante* a la cónica.
  2. Si $\Delta = f(P,Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) = 0$, la recta y la cónica se cortan en un punto doble. La recta se dice que es una *recta tangente* a la cónica.
  3. Si $\Delta = f(P,Q)^2 - \omega(P)\omega(Q) < 0$, la recta y la cónica se cortan en dos puntos imaginarios distintos. La recta se dice que es una *recta exterior* a la cónica.

2.3.1 Variedad tangente a una cónica

Definición. La *variedad tangente* a una cónica $\bar{C}$ en un punto $P \in \bar{C}$, es el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_2$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cónica $\bar{C}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P\bar{C} &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \Delta = f(P,X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P,X) = 0\}. \end{aligned}$$

Observaciones.

1. Si $P \in \bar{C}$ es un punto regular, entonces $T_P\bar{C}$ es una recta y, de hecho, es la recta polar del punto P; esto es, $T_P\bar{C} = r_p$.

2. Si $P \in \bar{C}$ es un punto singular, entonces $T_P\bar{C} = \mathbb{P}_2$.

3. Si $P \notin \bar{C}$, podemos definir la *variedad tangente* a $\bar{C}$ en $P \notin \bar{C}$ como el conjunto de puntos $X \in \mathbb{P}_2$ tales que la recta que une P y X es tangente a la cónica $\bar{C}$; esto es,

$$\begin{aligned} T_P\bar{C} &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \text{recta } XP \text{ es tangente a } \bar{C}\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \Delta = f(P,X)^2 - \omega(P)\omega(X) = 0\} \\ &= \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P,X)^2 = \omega(P)\omega(X)\}. \end{aligned}$$

   Y se cumple que $T_P\bar{C}$ es una cónica degenerada que tiene a P como punto singular.

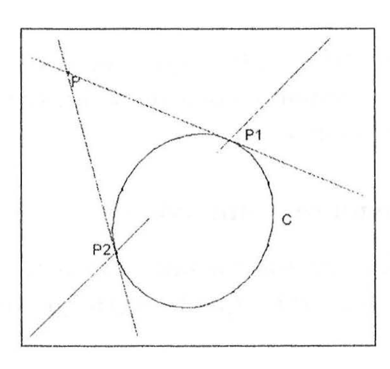
Construcción geométrica de $T_P\bar{C}$ cuando $P \notin \bar{C}$

Tenemos $T_P\bar{C} = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid \text{recta } XP \text{ es tangente a } \bar{C}\}$. Calculamos la recta polar de P,

$$r_P = \{X \in \mathbb{P}_2 \mid f(P,X) = 0\}$$

y hallamos la intersección de r_P y $\bar{C}$.

Si $r_P \cap \bar{C} = \{P_1, P_2\}$, entonces $T_P\bar{C} = r_{P_1} \cup r_{P_2}$.



Si $r_P \cap \bar{C}$ son dos puntos imaginarios; esto es, la recta r_P es exterior a la cónica $\bar{C}$ y el punto P es un punto interior a la cónica y desde él no se puede lanzar ninguna tangente.

2.4 Clasificación de las cónicas

Sea $\bar{C}$ una cónica con matriz asociada A.

rango A	sign (A)	Cónica	Ecuación canónica
3	3	cónica no degenerada vacía	$x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$
3	1	cónica no degenerada no vacía	$x_0^2+x_1^2-x_2^2=0$
2	2	punto singular	$x_0^2+x_1^2=0$
2	0	par de rectas	$x_0^2-x_1^2=0$
1	1	recta doble	$(ax_0+bx_1+cx_2)^2=1$

Nota: Llamamos *signatura* de A y lo denotamos sign(A) a $|\alpha-\beta|$ donde $\alpha=$n^o de autovalores positivos de A y $\beta=$n^o de autovalores positivos de A.

2.5 Clasificación afín y elementos notables de las cónicas

Sea $\overline{\mathbb{A}_2}=\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ el plano afín proyectivizado, con sistema de referencia $\mathcal{R}=\{O,B\}$. Y sea ω una forma cuadrática con matriz asociada A. Sea

$$\bar{C}=\{X\in\mathbb{P}_2(\mathbb{R}^3)\mid\omega(X)=0\}$$

una cónica proyectiva con cónica afín

$$C=\bar{C}\cap\mathbb{A}_2=\{X\in\mathbb{A}_2\mid\omega(\tilde{X})=0\},\ \text{donde } \tilde{X}=(1,x_1,x_2).$$

2.5.1 Centro de una cónica afín

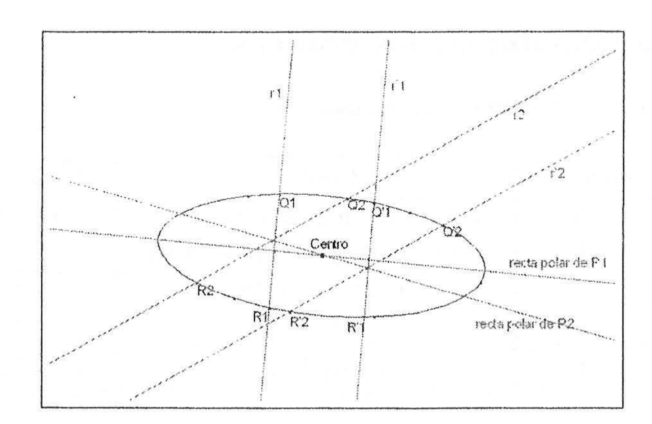
Definición: Se llama *centro* de una cónica afín C al polo de la recta del infinito si ese punto es un punto propio (si no lo es, se dice que la cónica afín no tiene centro propio).

La ecuación de la recta del infinito es $x_0=0$ y la ecuación de la cónica es $X^tAX=0$. Por tanto, el polo de la recta del infinito es el punto P tal que $P^tA=(1,0,0)$.

Ejemplo. La parábola es tangente al infinito: por tanto, el polo de la recta del infinito es el punto de tangencia, que está en el infinito, así que la parábola no tiene centro propio.

Proposición. El centro de una cónica afín es centro de simetría.

Construcción geométrica del centro de una cónica.



El centro es el polo de la recta del infinito, por tanto, es la intersección de las rectas polares de puntos del infinito.

1. Tomamos un punto del infinito P_1 y hallamos su recta polar de la siguiente manera:

   (a) Trazamos dos rectas paralelas r_1y r'_1 que corten a la cónica (tienen punto del infinito P_1).

   (b) Hallamos los puntos medios de los segmentos Q_1R_1 y $Q'_1R'_1$. Dichos puntos medios son los cuartos armónicos de Q_1, R_1, P_1 y Q'_1, R'_1, P_1 respectivamente.

   (c) La recta polar de P_1 es la recta que une dichos puntos medios.

2. Repetimos la construcción para trazar la recta polar de un punto del infinito P_2.

3. El centro de la cónica es el punto de intersección de dichas rectas polares.

2.6 Posición relativa de la cónica y la recta del infinito

1. Si la recta del infinito $r_\infty \equiv x_0 = 0$ no es tangente a la cónica $\bar{C}$ entonces el polo de r_∞ es un punto propio; $\bar{C}$ tiene centro que denotamos C y las coordenadas del centro son

$$Z = [(c_0, c_1, c_2)] \text{ tales que } (c_0, c_1, c_2)A = (1, 0, 0).$$

2. Si la recta del infinito $r_\infty \equiv x_0 = 0$ es tangente a la cónica $\bar{C}$ entonces el polo de r_∞, si existe, es el punto de tangencia. En este caso,

$$\bar{C} \cap r_\infty = \{\text{centro}\}$$

y el centro es un *punto doble*. Si la matriz es

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$\bar{C} \cap r_\infty \equiv \begin{cases} a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

se tiene la ecuación de segundo grado $a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} = 0$ con discriminante:

$$\Delta_{00} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -\det(A_{00})$$

donde

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

- Si $\det A_{00} = 0$, entonces $\bar{C} \cap r_\infty = \{P\}$, donde P es un punto doble, el centro impropio de la cónica.
- Si $\det A_{00} \neq 0$, entonces $\bar{C}$ tiene centro propio que es el centro de simetría de la cónica. Cualquier recta que pasa por el centro corta a la cónica en dos puntos que son simétricos respecto del centro.

Por tanto, se pueden dar los siguientes casos:

$$\bar{C} \cap r_\infty = \begin{cases} 2 \text{ puntos reales distintos } (\det(A_{00}) < 0) \\ 2 \text{ puntos imaginarios conjugados } (\det(A_{00}) > 0) \\ 1 \text{ punto } (\det(A_{00}) = 0) \end{cases}$$

2.6.1 Cónicas de tipo parabólico

Se tiene que: $\bar{C} \cap r_\infty = \{P\}$, P punto doble si y sólo si $\det A_{00} = 0$.
El centro de la cónica es un punto impropio.

- Si $\det A \neq 0$ la cónica es una *parábola*.
- Si $\det A = 0$ la cónica es un *par de rectas paralelas* $\begin{cases} \text{distintas si } \operatorname{rg} A = 2 \\ \text{recta doble si } \operatorname{rg} A = 1 \end{cases}$

2.6.2 Cónicas de tipo elíptico

Se tiene que: $\bar{C} \cap r_\infty = \{P_1, P_2\}$, P_1, P_2 puntos imaginarios conjugados si y sólo si $\det A_{00} > 0$.

El centro de la cónica es un punto propio.

- Si $\det A \neq 0$ la cónica es una *elipse.*
- Si $\det A = 0$ la cónica es un *par de rectas imaginarias que se cortan en un punto real* (el punto singular de la cónica).

2.6.3 Cónicas de tipo hiperbólico

Se tiene que: $\bar{C} \cap r_\infty = \{P_1, P_2\}$, P_1, P_2 puntos reales distintos si y sólo si $\det A_{00} < 0$.

El centro de la cónica es un punto propio.

- Si $\det A \neq 0$ la cónica es una *hipérbola.*
- Si $\det A = 0$ la cónica es un *par de rectas reales que se cortan en el punto singular*

2.6.4 Elementos notables de las cónicas

Sea la cónica $\bar{C} \equiv X^t A X = 0$, con $A^t = A$ una cónica regular.

Centro Definimos *centro* de la cónica $\bar{C}$ al polo de la recta impropia (es el centro de simetría de la cónica).

Diámetros y diámetros conjugados Dos rectas r y s que contienen a un punto P se dicen *conjugadas* con respecto a una cónica regular $\bar{C}$ cuando cada una de ellas contiene al polo de la otra.

Definimos *diámetro de la cónica* $\bar{C}$ a toda recta tal que su polo es un punto impropio.

Por tanto, para cada punto impropio tenemos un diámetro.

En virtud del Teorema fundamental de la polaridad, todos los diámetros por ser rectas polares de puntos impropios contienen al polo de la recta impropia; es decir, contienen al centro.

Asíntotas Se llama *asíntota* de una cónica, cuando la tiene, a todo diámetro que es tangente a la cónica. Por tanto, las asíntotas son las rectas polares de los puntos impropios de la cónica.

Ejes en las cónicas regulares Dos rectas $r' \equiv a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$ y $s' \equiv b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 = 0$ con $a_1 \neq 0$ ó $a_2 \neq 0$ y $b_1 \neq 0$ ó $b_2 \neq 0$ diremos que son *ortogonales* en el plano proyectivo $\mathbb{P}_2$ si $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

Se llaman *ejes de una cónica regulares* a aquellos diámetros que siendo conjugados son además ortogonales.

Veamos cómo obtener los ejes:

Sean $P[0, p_1, p_2]$ y $Q[0, q_1, q_2]$ los puntos impropios de los ejes. Como los ejes son rectas ortogonales P y Q se cumple: $p_1q_1 + p_2q_2 = 0$. Y por otra parte, como P y Q son los puntos impropios de rectas conjugadas, deben ser puntos conjugados; esto es, $P^tAQ = 0$. Por tanto, se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \\ (0, p_1, p_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \\ (p_1a_{11} + p_2a_{12})\, q_1 + (p_1a_{12} + p_2a_{22})\, q_2 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_1a_{11} + p_2a_{12} & p_1a_{12} + p_2a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right.$$

El sistema anterior tiene solución distinta de la trivial si la matriz de coeficientes tiene determinante cero; esto es, si las filas de la matriz de coeficientes son proporcionales:

$$\left\{\begin{array}{l} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 = \lambda p_1 \\ a_{12}p_1 + a_{22}p_2 = \lambda p_2 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (a_{11} - \lambda)\, p_1 + a_{12}p_2 = 0 \\ a_{12}p_1 + (a_{22} - \lambda)\, p_2 = 0 \end{array}\right.$$

El sistema anterior tiene solución $(p_1, p_2) \neq (0, 0)$ si

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A_{00} = 0$$

Nótese que es la ecuación característica de la matriz A_{00} que es diagonalizable.

Nota: Si (v_1, v_2) es autovector asociado al autovalor λ_1 de A_{00} entonces $Q[0, v_1, v_2]$ y $P[0, -v_2, v_1]$ satisfacen el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} p_1q_1 + p_2q_2 = 0 \\ P^tAQ = 0 \end{array}\right.$$

luego sus rectas polares son los ejes de la cónica $\bar{C}$.

Por último, llamamos *vértices* de una cónica $\bar{C}$ a los puntos de intersección los ejes de la cónica con la cónica.

Por tanto los ejes de la cónica son las rectas polares de los puntos impropios $P_1[0,-1,1]$ y $P_2[0,1,1]$; esto es,

$$r_{P_1} \equiv (0,-1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$r_{P_2} \equiv (0,1,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

Por tanto, los ejes de la cónica son

$$\begin{aligned} r_{P_1} &\equiv x_0 = 0, \\ r_{P_2} &\equiv -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Los diámetros de la cónica se cortan en el centro; en particular, el centro es el punto de intersección de los ejes de la cónica:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ -x_0 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow Z[0,-1,1]$$

La parábola tiene centro impropio.

Los vértices de la cónica son los puntos de intersección de la cónica con sus ejes. Como $\bar{C}$ es una parábola, tiene un punto impropio que es precisamente el centro Z y también es un vértice de la parábola (el vértice impropio):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_2 + 2x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1 + x_2)^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow Z[0,-1,1]$$

El otro vértice es la intersección de la parábola con su eje propio:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 1 + x_1^2 + x_2^2 - 2x_2 + 2x_1x_2 = 0 \\ -1 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 1 + (x_1 + x_2)^2 - 2x_2 = 0 \\ 1 = 2x_1 + 2x_2 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1 + \frac{1}{4} - 2x_2 = 0 \\ 1 = 2x_1 + 2x_2 \end{array} \right. \\ \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_2 = \frac{5}{8} \\ x_1 = \frac{1}{2} - x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{8} = -\frac{1}{8} \end{array} \right. \Longleftrightarrow V\left[1, -\frac{1}{8}, \frac{5}{8}\right]. \end{aligned}$$

Ejemplo 2 Sea la cónica $\bar{C} \equiv x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0$. Se pide:

1. Clasificar la cónica.

2. Calcular las asíntotas de la cónica.

3. Calcular los ejes de la cónica.

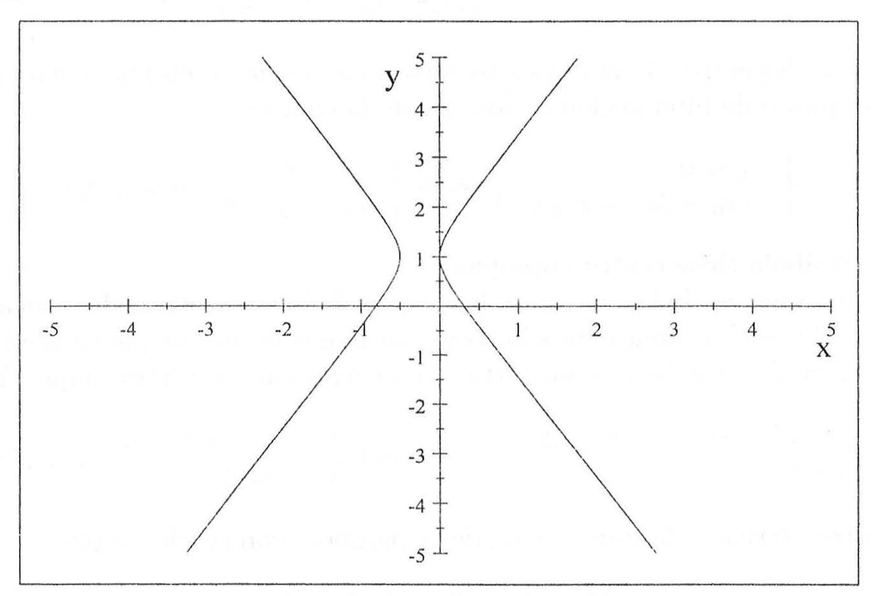
4. Hallar el centro de la cónica.

5. Calcular los vértices de la cónica.

Clasificación:
La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -1 \neq 0$, ($\bar{C}$ es una cónica regular) y como $\det A_{00} = -4 < 0$, la cónica es una hipérbola.



Los puntos impropios de la hiperbola satisfacen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -4x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x_2 + 2x_1)(x_2 - 2x_1) = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow P_1[0, 1, -2] \text{ y } P_2[0, 1, 2]$$

Por tanto, las asíntotas de la cónica son:

$$\begin{aligned} r_{P_1} &\equiv P_1^t AX = x_0 - 4x_1 - 2x_2 = 0, \\ r_{P_2} &\equiv P_2^t AX = -3x_0 - 4x_1 + 2x_2 = 0. \end{aligned}$$

Para calcular los ejes calculamos los autovectores de la matriz A_{00}. Los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 1$. Y los autovectores asociados a dichos autovalores son:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= (1,0) \text{ autovector asociado a } \lambda = -4\\ \vec{v}_2 &= (0,1) \text{ autovector asociado a } \lambda = 1\end{aligned}$$

Por tanto los ejes de la cónica son las rectas polares de los puntos impropios $Q_1[0,1,0]$ y $Q_2[0,0,1]$; esto es,

$$\begin{aligned} r_{Q_1} &\equiv (0,1,0)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & -4 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -x_0 - 4x_1 = 0\\ r_{Q_2} &\equiv (0,0,1)\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1\\ -1 & -4 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0\\ x_1\\ x_2\end{pmatrix} = -x_0 + x_2 = 0\end{aligned}$$

El centro de la cónica es el punto de intersección de los ejes. Como C es una hipérbola, su centro es un punto propio y sus coordenadas satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + 4x_1 = 0\\ 1 - x_2 = 0\end{array}\right. \Longrightarrow Z\left[1, -\frac{1}{4}, 1\right]$$

Los vértices de la cónica son los puntos de intersección de la cónica con sus ejes. Por tanto,

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{l} x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0\\ -x_0 - 4x_1 = 0\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{l} 16x_1^2 - 4x_1^2 + x_2^2 + 8x_1^2 + 8x_1x_2 = 0\\ x_0 = -4x_1\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 20x_1^2 + 8x_1x_2 + x_2^2 = 0\\ x_0 = -4x_1\end{array}\right.\\ \underset{t=x_2/x_1}{\Longleftrightarrow} &\left\{\begin{array}{l} 20 + 8t + t^2 = 0\\ x_0 = -4x_1\end{array}\right.\end{aligned}$$

Como $20 + 8t + t^2 = 0$ no tiene soluciones reales, el eje $-x_0 - 4x_1 = 0$ de la cónica corta a la cónica en puntos imaginarios. Veamos la intersección de la cónica con el otro eje:

$$\begin{aligned} &\left\{\begin{array}{l} x_0^2 - 4x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_1 - 2x_0x_2 = 0\\ -x_0 + x_2 = 0\end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 4x_1^2 + 2x_2x_1 = 0\\ -x_0 + x_2 = 0\end{array}\right.\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\,(2x_1 + x_2)\,x_1 = 0\\ -x_0 + x_2 = 0\end{array}\right.\end{aligned}$$

Por tanto $V_1[1,0,1]$ y $V_2[1,-1/2,1]$ son los dos vértices propios y reales de la hipérbola.

2.7 Invariantes métricos de una cónica

Sean $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ y $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}', B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')\}$ dos referencias ortonormales del plano afín $\mathbb{A}_2$. Sea C una cónica del plano afín euclídeo con matriz asociada A respecto de la referencia $\mathcal{R}$ y matriz B respecto de la referencia $\mathcal{R}'$, es decir,

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{R}} &\equiv (x_0, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ C_{\mathcal{R}'} &\equiv (x_0', x_1', x_2') \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & b_{11} & b_{12} \\ b_{02} & b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

entonces, se cumple

$$\det(A) = \det(B)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \det A_{00} = \det B_{00} \\ a_{11} + a_{22} = b_{11} + b_{22} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Los autovalores de } A_{00} \\ \text{y } B_{00} \text{ coinciden.} \end{array} \right.$$

siendo

$$A_{00} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ y } B_{00} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

2.8 Forma reducida de una cónica regular

Sea C una cónica que respecto de una referencia ortonormal $\mathcal{R} = \{\mathcal{O}, B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)\}$ tiene por ecuación: $C_{\mathcal{R}} \equiv X^T A X = 0$.

2.8.1 Cónicas con centro propio: hipérbolas y elipses

Si $\det(A_{00}) \neq 0$ entonces existe una referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}', B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')\}$ tal que la expresión matricial de la cónica en la nueva referencia es:

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv (x_0', x_1', x_2') \begin{pmatrix} d_{00} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & d_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 0$$

La ecuación $C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{00}(x_0')^2 + d_{11}(x_1')^2 + d_{22}(x_2')^2 = 0$ se denomina *ecuación reducida de la cónica*, donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O}' \text{ es el } \textit{centro} \text{ de la cónica} \\ d_{11}, d_{22} \text{ son los autovalores de } A_{00} \\ \vec{e}_1', \vec{e}_2' \text{ vectores propios de } A_{00} \quad \text{(vectores de dirección de los ejes de } C) \\ d_{00} \text{ cumple } \det(A) = d_{00} d_{11} d_{22} \end{array} \right.$$

Ejemplo 1 Sea la cónica $\bar{C} \equiv 2x_0x_2 - 2x_1x_2 - x_0^2 + 7x_1^2 + 7x_2^2 = 0$.

Clasificación:

La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -55 \neq 0$, por tanto, es una cónica regular. Los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 8$ (por tanto, $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2 = 48 > 0$). La cónica C es una elipse.

Elementos notables:

El *centro* de la elipse es un punto propio que no pertenece a la cónica. Tenemos:

$$P = A^{-1}U \text{ siendo } U[1,0,0]$$

luego

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{48}{55} \\ \frac{1}{55} \\ \frac{7}{55} \end{pmatrix}.$$

Esto es

$$\text{Centro} \equiv \left[\left(-\frac{48}{55}, \frac{1}{55}, \frac{7}{55}\right)\right] = \left[\left(1, -\frac{1}{48}, -\frac{7}{48}\right)\right]$$

Los *diámetros* de la elipse son las rectas que pasan por su centro. La familia de diámetros es

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_0 & -\frac{48}{55} & 0 \\ x_1 & \frac{1}{55} & a \\ x_2 & \frac{7}{55} & b \end{vmatrix} &= \frac{1}{55}(b - 7a)\, x_0 + \frac{48}{55} b x_1 - \frac{48}{55} a x_2 = 0, \\ \text{esto es, } d_{a,b} &\equiv (b - 7a)\, x_0 + 48 b x_1 - 48 a x_2 = 0. \end{aligned}$$

Análogamente son las rectas polares de puntos impropios. Si $P_\infty = [(0, \alpha, \beta)] \in r_\infty$, entonces su recta polar vtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} r_{P_\infty} &\equiv (0, \alpha, \beta) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ \text{esto es, } d_{P_\infty} &\equiv \beta x_0 + (7\alpha - \beta)\, x_1 + (7\beta - \alpha)\, x_2. \end{aligned}$$

Nótese que si tomamos $\alpha = 7b - a$ y $\beta = b - 7a$, se cumple: $d_{P_\infty} \equiv d_{a,b}$.

La elipse no tiene *asíntotas* ya que todos sus puntos son propios.

Los *ejes* de la elipse pasan por el centro y tienen direcciones dadas por dos vectores propios ortogonales. Los vectores propios de C son:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= (1,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_1 = 6,\\ \vec{e}_2 &= (-1,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_2 = 8,\end{aligned}$$

por tanto, los ejes son:

$$\text{Eje 1} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & \frac{1}{-48} & 1 \\ x_2 & \frac{7}{-48} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{8}x_0 - x_1 + x_2 = 0,$$

$$\text{Eje 2} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & \frac{1}{-48} & -1 \\ x_2 & \frac{7}{-48} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}x_0 - x_1 - x_2 = 0.$$

Los *vértices* son los puntos de intersección de la elipse con sus ejes. Como todos los puntos de la elipse son puntos propios, buscamos los vértices en $x_0 = 1$, esto es, planteamos los sistemas

$$\bar{C} \cap \text{Eje 1} \equiv \begin{cases} 2x_0x_2 - 2x_1x_2 - x_0^2 + 7x_1^2 + 7x_2^2 = 0 \\ \frac{1}{8}x_0 - x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\bar{C} \cap \text{Eje 2} \equiv \begin{cases} 2x_0x_2 - 2x_1x_2 - x_0^2 + 7x_1^2 + 7x_2^2 = 0 \\ -\frac{1}{6}x_0 - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

para $x_0 = 1$ y obtanemos

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_1x_2 - 1 + 7x_1^2 + 7x_2^2 = 0 \\ \frac{1}{8} - x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V_1^{\pm} = \left[\left(1, -\frac{1}{48} \pm \frac{1}{24}\sqrt{55}, -\frac{7}{48} \pm \frac{1}{24}\sqrt{55}\right)\right]$$

$$\begin{cases} 2x_2 - 2x_1x_2 - 1 + 7x_1^2 + 7x_2^2 = 0 \\ -\frac{1}{6} - x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V_2^{\pm} = \left[\left(1, -\frac{1}{48} \pm \frac{1}{48}\sqrt{165}, -\frac{7}{48} \mp \frac{1}{48}\sqrt{165}\right)\right].$$

Forma reducida: La ecuación reducida de la elipse es

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{00}(x_0')^2 + d_{11}(x_1')^2 + d_{22}(x_2')^2 = 0,$$

donde $d_{11} = 6$, $d_{22} = 8$ y como $\det(A) = -55 = d_{00}d_{11}d_{22} = d_{00}48$, entonces $d_{00} = -55/48$. Por tanto,

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv \frac{-55}{48}(x_0')^2 + 6(x_1')^2 + 8(x_2')^2 = 0,$$

siendo el origen de la referencia $\mathcal{R}'$, el centro de la cónica: $\mathcal{O}'= \left(-\frac{1}{48}, -\frac{7}{48}\right)$ y la base es

$$B' = \left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}\right) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Utilizando la matriz del cambio de referencia resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{48} & -\frac{7}{48} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{48} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{7}{48} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{55}{48} & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2 Sea la cónica $\bar{C} \equiv 11x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8\sqrt{2}x_0x_2 + 3x_1x_2 = 0$.
Clasificación:
La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -6 \neq 0$ (es una cónica regular) y los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; por tanto, $\det A_{00} = -2 < 0$. La cónica C es una hipérbola.

Elementos notables:
El *centro* de la hipérbola es un punto propio que no pertenece a la cónica. Tenemos:

$$P = A^{-1}U \text{ siendo } U[(1, 0, 0)]$$

luego

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

El centro es

$$Z \equiv \left[\left(\frac{1}{3}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{3}\sqrt{2}\right)\right] = \left[\left(1, -3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)\right].$$

Los *diámetros* de la hipérbola son las rectas que pasan por su centro (las rectas polares de puntos impropios). La familia de diámetros es

$$\begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & -3\sqrt{2} & a \\ x_2 & -\sqrt{2} & b \end{vmatrix} = \sqrt{2}\,(a-3b)\,x_0 - bx_1 + ax_2 = 0,$$

$$\text{esto es, } d_{a,b} \equiv \sqrt{2}\,(a-3b)\,x_0 - bx_1 + ax_2 = 0.$$

La hipérbola tiene dos *asíntotas* que son las tangentes a la hipérbola en sus puntos impropios. Los puntos impropios de la hipérbola son:

$$P \in \bar{C} \cap r_\infty \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} P_1 \left[(0,1,3-2\sqrt{2})\right] \\ P_2 \left[(0,1,3+2\sqrt{2})\right] \end{array} \right.$$

La polar de P_1 es:

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \left(0,1,3-2\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow r_1 \equiv \left(12\sqrt{2} - 16\right) x_0 + \left(4 - 3\sqrt{2}\right) x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \end{aligned}$$

y la polar de P_2 es:

$$\begin{aligned} r_2 &\equiv \left(0,1,3+2\sqrt{2}\right) \begin{pmatrix} 11 & 0 & 4\sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 4\sqrt{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\Longrightarrow r_2 \equiv \left(16 + 12\sqrt{2}\right) x_0 + \left(4 + 3\sqrt{2}\right) x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, las asíntotas de la hipérbola son

$$\begin{aligned} r_1 &\equiv \left(12\sqrt{2} - 16\right) x_0 + \left(4 - 3\sqrt{2}\right) x_1 + \sqrt{2}x_2 = 0, \\ r_2 &\equiv \left(16 + 12\sqrt{2}\right) x_0 + \left(4 + 3\sqrt{2}\right) x_1 - \sqrt{2}x_2 = 0. \end{aligned}$$

Nótese que para $a = 1$, $b = 3 - 2\sqrt{2}$ se tiene

$$\begin{aligned} d_{1,3-2\sqrt{2}} &\equiv \sqrt{2}\left(1 - 3(3 - 2\sqrt{2})\right) x_0 - (3 - 2\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0, \\ &\equiv \left(12 - 8\sqrt{2}\right) x_0 - (3 - 2\sqrt{2})x_1 + x_2 = 0 \\ &\equiv \sqrt{2}\left(\left(12 - 8\sqrt{2}\right) x_0 - (3 - 2\sqrt{2})x_1 + x_2\right) = 0 \\ &\equiv \left(\left(12\sqrt{2} - 16\right) x_0 + (4 - 3\sqrt{2})x_1 + \sqrt{2}x_2\right) = 0 \\ &\equiv r_1 \end{aligned}$$

y para $a = 1$ y $b = 3 + 2\sqrt{2}$ se tiene: $d_{1,3+2\sqrt{2}} \equiv r_1$.

Los *ejes* de la hipérbola pasan por el centro y tienen direcciones dadas por dos vectores propios ortogonales. Los vectores propios de C son:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_1 = 1, \\ \vec{e}_2 &= (-1,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_2 = -2, \end{aligned}$$

por tanto, los ejes son:

$$\text{Eje1} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & -3\sqrt{2} & 1 \\ x_2 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = x_2 - x_1 - 2x_0\sqrt{2} = 0,$$

$$\text{Eje 2} \equiv \begin{vmatrix} x_0 & 1 & 0 \\ x_1 & -3\sqrt{2} & -1 \\ x_2 & -\sqrt{2} & 1 \end{vmatrix} = -x_1 - x_2 - 4x_0\sqrt{2} = 0.$$

Los *vertices* son los puntos de intersección de la hipérbola con sus ejes

$$\bar{C} \cap \text{Eje1} \equiv \begin{cases} 11x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_0x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 - 2x_0\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\bar{C} \cap \text{Eje 2} \equiv \begin{cases} 11x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_0x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4x_0\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

Si $x_0 = 1$, entonces

$$\begin{cases} 11 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ x_2 - x_1 - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \text{no hay solución real}$$

$$\begin{cases} 11 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 + 8x_2 + 3x_1x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - 4\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow V_2 = \left[\left(1,\ -1 - 2\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{31 - 16\sqrt{2}},\ 1 - 2\sqrt{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{31 - 16\sqrt{2}}\right)\right]$$

Forma reducida: La ecuación reducida de esta hipérbola es

$$d_{00}(x_0')^2 + d_{11}(x_1')^2 + d_{22}(x_2')^2 = 0$$

donde $d_{11} = 1$, $d_{22} = -2$ y como $\det(A) = -6 = d_{00}d_{11}d_{22} = -2d_{00}$, entonces $d_{00} = 3$. Por tanto,

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv 3(x_0')^2 + (x_1')^2 - 2(x_2')^2 = 0,$$

siendo el origen de la referencia $\mathcal{R}'$, el centro de la cónica: $\mathcal{O}' = \left(-3\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ y la base es

$$B' = \left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}\right) = \left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).$$

Utilizando la matriz del cambio de referencia resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.8.2 Cónicas con centro impropio: parábolas

Si $\det(A_{00}) = 0$ entonces existe una referencia ortonormal $\mathcal{R}' = \{\mathcal{O}', B' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2')\}$ tal que la expresión matricial de la cónica en la nueva referencia es:

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv (x_0', x_1', x_2') \begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{02} \\ 0 & d_{11} & 0 \\ d_{02} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = 0.$$

La ecuación $C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{11}(x_1')^2 + 2d_{02}x_0'x_2' = 0$ se denomina *ecuación reducida de la cónica*, donde

$$\begin{cases} \mathcal{O}' \text{ es el } \textit{vértice} \text{ de la parábola} \\ d_{11}, 0 \text{ son los autovalores de } A_{00} \\ \vec{e}_1', \vec{e}_2' \text{ vectores propios asociados a } d_{11}, 0 \text{ resp.} \end{cases}$$

Si cambiamos el orden de los vectores, la matriz que se obtiene es

$$\begin{pmatrix} 0 & d_{01} & 0 \\ d_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{22} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo Sea la cónica $\bar{C} \equiv -2x_0x_2 + 4x_1x_2 + x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0$.
Clasificación:
La matriz de la cónica es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

El determinante de A es: $\det(A) = -4 \neq 0$ (es una cónica regular) y los autovalores de A_{00} son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ (por tanto, $\det A_{00} = \lambda_1\lambda_2 = 0$). La cónica $\bar{C}$ es una parábola.

Elementos notables:
El *centro* de la parábola (el polo de la recta del infinito) es un punto impropio que pertenece a la cónica. Se tiene:

$$\bar{C} \cap r_\infty \equiv 4x_1x_2 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0 \underset{t=x_2/x_1}{\Longrightarrow} 4t + 4 + t^2 = 0 \Longrightarrow t = -2 \Longrightarrow Z[(0,1,-2)]$$

Los *diámetros* de la parábola son todas las rectas que pasan por su centro (rectas polares de puntos impropios). Tienen la dirección del vector $(0, 1, -2)$, por tanto,

Familia de diámetros $d_a \equiv ax_0 + 2x_1 + x_2 = 0$.

La *asíntota* de la parábola (recta tangente en su punto impropio) es la recta impropia: $x_0 = 0$.

La parábola tiene un único *eje propio*. Tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (2,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_2 = 5, \\ \vec{e}_2 &= (-1/2,1) \text{ autovector asociado a } \lambda_1 = 0. \end{aligned}$$

Por tanto, el eje propio de la parábola es la recta polar del punto: $P[(0,2,1)]$; esto es

$$\text{Eje} \equiv (0,2,1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow \text{Eje} \equiv -x_0 + 10x_1 + 5x_2 = 0.$$

El *vértice* es la intersección de la parábola con su eje:

$$\bar{C} \cap \text{Eje} \equiv \begin{cases} -2x_0x_2 + 4x_1x_2 + x_0^2 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ -x_0 + 10x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

En $x_0 = 1$

$$\begin{cases} -2x_2 + 4x_1x_2 + 1 + 4x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ -1 + 10x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow V\left[\left(1, -\frac{4}{25}, \frac{13}{25}\right)\right]$$

Forma reducida: La ecuación reducida de esta parábola es

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv d_{11}(x_1')^2 + 2d_{02}x_0'x_2' = 0$$

donde $d_{11} = 5$ y como $\det(A) = -4 = (d_{02})^2 d_{11}$ entonces $(d_{02})^2 = 4/5$. Por tanto,

$$C_{\mathcal{R}'} \equiv 5(x_1')^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x_0'x_2' = 0,$$

siendo el origen de la referencia $\mathcal{R}'$ el vértice de la parábola: $O' = \left(-\frac{4}{25}, \frac{13}{25}\right)$, y la base es

$$B' = \left(\frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|}\right) = \left(\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right).$$

Utilizando la matriz del cambio de referencia resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{25} & \frac{13}{25} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{4}{25} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{13}{25} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{2}{5}\sqrt{5} \\ 0 & 5 & 0 \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3 Bibliografía

1. J. M. Aroca Hernández-Ros, M. J. Fernández Bermejo, *Notas de Geometría Proyectiva*, Universidad de Valladolid, 2002.

2. F. Etayo Gordejuela, *Apuntes de Geometría Proyectiva*, Universidad de Cantabria.

3. G. T. Kneebone, J. G. Semple, *Algebraic projective geometry*, Springer-Verlag, 1988.

4. J. L. Pinilla, *Lecciones de programación lineal-cónicas-cuádricas-supercies*, Ed. Varicop, Madrid, 1971.

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

302.01

cuadernos.ijh@gmail.com
info@mairea-libros.com

